

**Projet de Traitement du Signal :**  
**Récepteur MF-TDMA (\*)**  
**(\*) Multiple Frequency – Time Division Multiple Access**

**Introduction :**

Le but du projet est de comprendre l'apport des techniques de traitement du signal dans des applications multimédia par satellite. L'application retenue concerne des systèmes d'accès bidirectionnel à haut débit par satellite. Ces systèmes utilisent le standard DVB-RCS(\*) qui permet d'offrir aux utilisateurs une interactivité à l'aide d'une voie retour par satellite.

La voie retour par satellite utilise l'accès MF-TDMA. Cet accès permet de partager en temps et en fréquence la ressource satellite entre les différents utilisateurs. Ce partage temporel et fréquentiel de la ressource repose sur une structure de trame normalisée appelée trame MF-TDMA.

(\*) *DVB-RCS : Digital Video Broadcasting – Return Channel via Satellite*

**Description d'un système DVB-RCS :**

Un système DVB-RCS offre un accès Internet bidirectionnel à haut débit par satellite. Les utilisateurs disposent d'un terminal qui permet de les relier à une station d'interconnexion à travers une liaison satellite. La station d'interconnexion joue le rôle d'interface avec le monde de l'Internet et du réseau pour offrir des applications diverses telles que la navigation à travers le WEB, la messagerie ou le transfert de données :

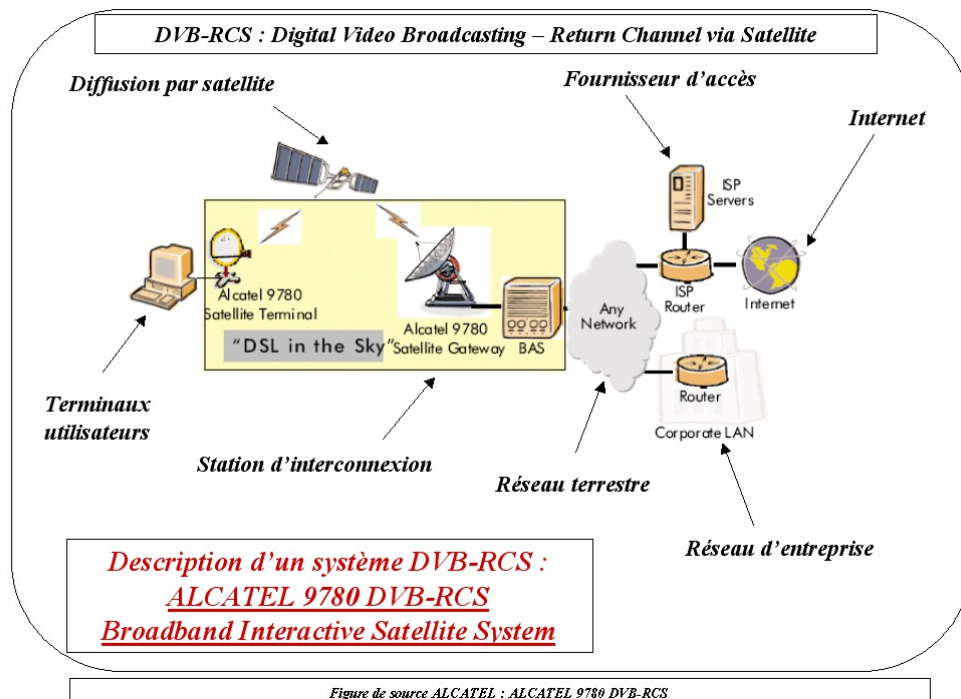
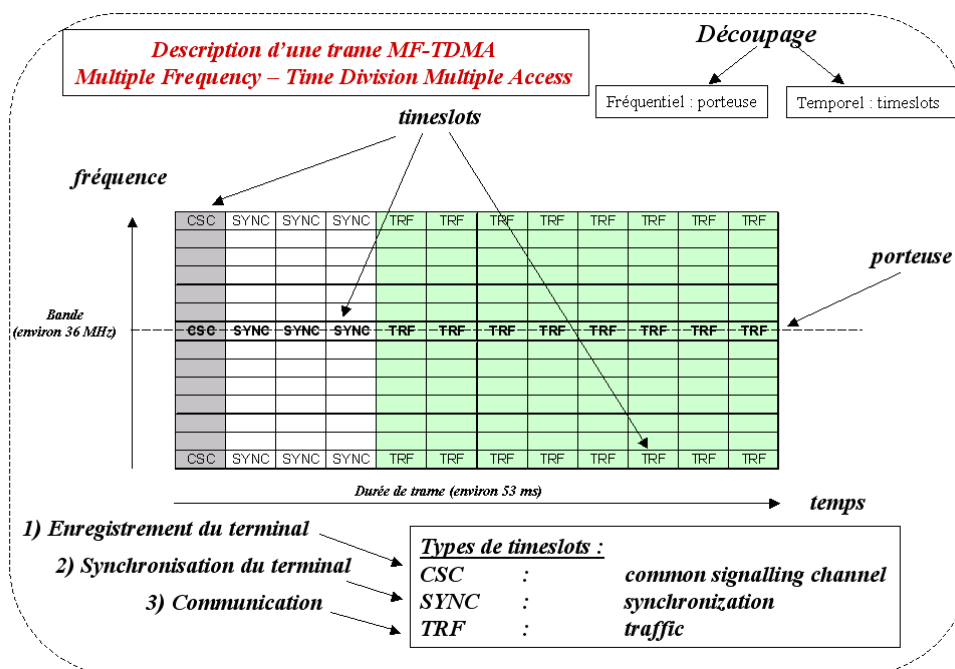


Figure de source ALCATEL : ALCATEL 9780 DVB-RCS

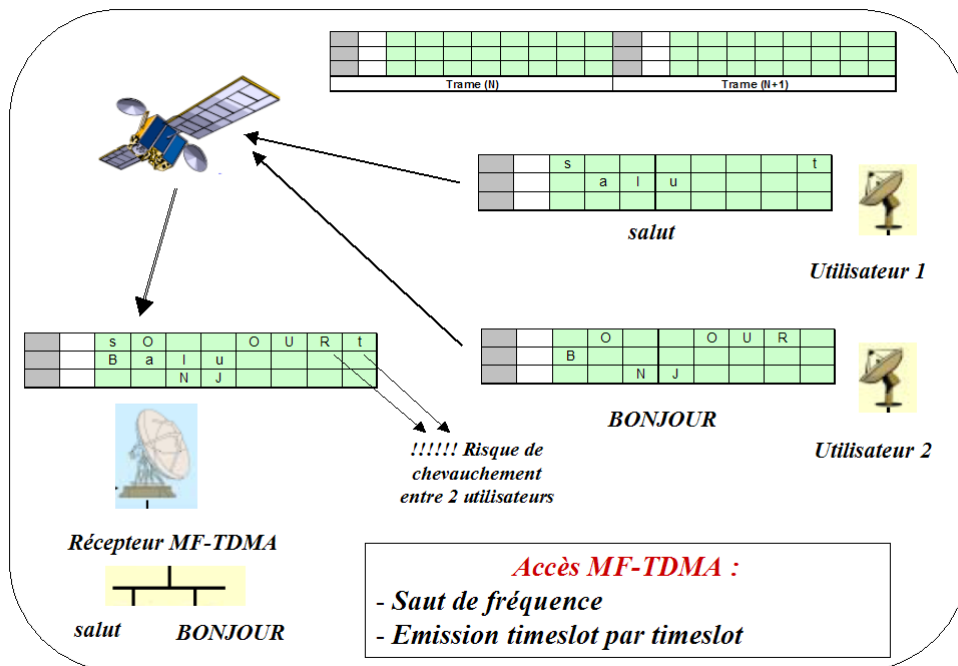
## Description de la trame MF-TDMA :

Les utilisateurs du système accèdent à la station d'interconnexion en utilisant une trame MF-TDMA. Cette dernière correspond à un motif temps fréquence avec une durée temporelle et une bande fréquentielle fixées en fonction du système.

La bande fréquentielle de la trame est découpée en plusieurs porteuses dont la largeur dépend du rythme symbole. Chaque porteuse est découpée en plusieurs portions temporelles appelées timeslots et qui sont partagées entre les différents utilisateurs :

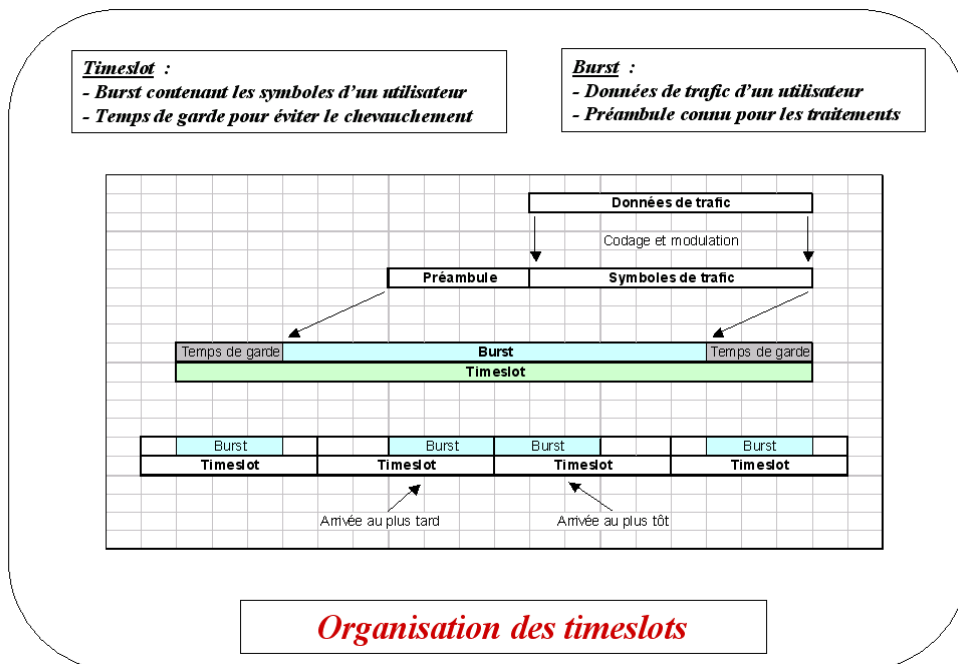


Chaque utilisateur transmet ses données en les répartissant dans les timeslots qui lui ont été alloués. L'allocation des timeslots entre les différents utilisateurs est prise en charge par la station d'interconnexion alors que le récepteur MF-TDMA restitue les données envoyées par chaque utilisateur :



Afin d'éviter le chevauchement entre 2 utilisateurs, chaque timeslot se compose d'un burst entouré d'un temps de garde et contenant les symboles de l'utilisateur.

Chaque burst se décompose d'un entête connu appelé préambule et d'une partie privée contenant les données de trafic de l'utilisateur :



**Etapes du travail à effectuer :**

Une des difficultés d'un système DVB-RCS est la mise en œuvre du récepteur MF-TDMA. Un tel récepteur, situé dans la station d'interconnexion, doit extraire et restaurer les données de tous les utilisateurs ayant accès au système. L'objectif du projet est la mise en œuvre de mécanismes simplifiés permettant d'effectuer les différents traitements classiques du récepteur :

- Démultiplexage des porteuses du canal
- Démodulation des porteuses
- Décodage des données des utilisateurs

Le scénario retenu pour le projet consiste en une trame MF-TDMA composée de 2 porteuses contenant chacune 5 timeslots :

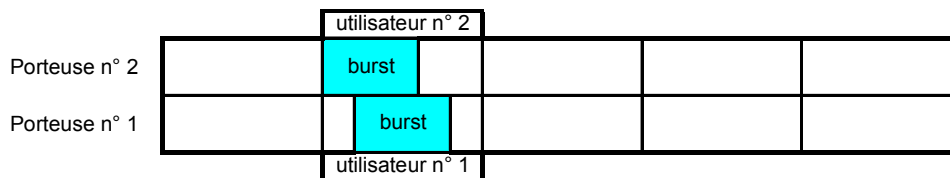
Porteuse n° 2	1	2	3	4	5
Porteuse n° 1	1	2	3	4	5

Les paramètres de la trame sont résumés dans le tableau suivant :

Durée de la trame	200	ms
Nombre de porteuses	2	
Nombre de timeslots par trame	5	
Durée du timeslot	40	ms
Durée du burst	38	ms
Nombre de symboles du préambule	40	
Rythme symbole	10	kHz
Fréquence de la porteuse n° 1	0	kHz
Fréquence de la porteuse n° 2	46	kHz
Fréquence d'échantillonnage	120	kHz

Deux utilisateurs vont accéder au système en utilisant la trame de la manière suivante :

- L'utilisateur n° 1 exploite le 2<sup>ème</sup> timeslot de la porteuse n° 1 avec un retard de 1 ms par rapport au début du timeslot
- L'utilisateur n° 2 exploite le 2<sup>ème</sup> timeslot de la porteuse n° 2 avec un retard nul.



Le travail à effectuer consiste à restaurer les données de l'utilisateur n° 1 en suivant 6 étapes :

**1. Modélisation du signal MF-TDMA :**

Cette étape consiste à générer un signal synthétique et représentatif d'un signal réel reçu par un récepteur MF-TDMA.

**2. Analyse spectrale :**

Cette étape permet d'étudier les représentations spectrales du signal MF-TDMA à partir des estimateurs classiques du périodogramme et du corrélogramme (biaisé et non biaisé). La présence de plusieurs porteuses sera particulièrement étudiée.

### 3. *Extraction de la porteuse par filtrage :*

Pour pouvoir isoler la porteuse de l'utilisateur n° 1, un filtrage doit être effectué sur le signal composite. Cette étape permettra de choisir le filtre approprié pour restaurer la porteuse cible.

### 4. *Détection de la présence du burst :*

Après avoir récupéré la porteuse cible, il faut identifier le numéro du timeslot occupé par le burst de l'utilisateur n° 1. Cette étape servira à étudier et implémenter le meilleur détecteur de présence du burst (détecteur de Neyman-Pearson).

### 5. *Localisation temporelle du burst :*

L'objectif de cette étape est de mesurer l'instant d'arrivée du burst dans le timeslot. Cette mesure est basée sur l'utilisation de l'intercorrélation glissante entre les échantillons du timeslot et les échantillons du préambule qui est une séquence connue par le récepteur.

### 6. *Restauration des données de l'utilisateur :*

Cette étape sert à restaurer les symboles de l'utilisateur n° 1 en utilisant la technique de filtrage adapté.

<b><i>Etape 1 : Modélisation du signal MF-TDMA :</i></b>
--

Cette étape consiste à générer un signal synthétique et représentatif d'un signal réel reçu par un récepteur MF-TDMA. Un tel signal peut être modélisé de la manière suivante :

$$s(t) = m(t) + b(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

- $T$  correspond à la durée de la trame
- $m(t)$  est le signal utile MF-TDMA
- $b(t)$  est un bruit blanc gaussien

Le signal utile MF-TDMA peut être exprimé de la manière suivante :

$$m(t) = p_1(t) + p_2(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

- $p_1(t)$  est la porteuse n° 1
- $p_2(t)$  est la porteuse n° 2

La porteuse n° 1 est un signal nul dans lequel est inséré le burst de l'utilisateur n° 1. L'instant de début du burst ( $t_1$ ) est fonction du numéro du timeslot et du retard du burst par rapport au début du timeslot (i.e.  $t_1 = (\text{numéro du timeslot}) * (\text{durée du timeslot}) + (\text{retard du burst dans le timeslot})$ ) :

$$p_1(t) = b_1(t-t_1) \quad t_1 \leq t \leq t_1 + T_b$$
$$p_1(t) = 0 \text{ sinon}$$

- $T_b$  est la durée du burst
- $b_1(t)$  est le burst de l'utilisateur n° 1

De même, la porteuse n° 2 est un signal nul dans lequel est inséré le burst de l'utilisateur n° 2. L'instant de début du burst ( $t_2$ ) est fonction du numéro du timeslot et du retard du burst par rapport au début du timeslot :

$$p_2(t) = b_2(t-t_2) \quad t_2 \leq t \leq t_2 + T_b$$
$$p_2(t) = 0 \text{ sinon}$$

- $b_2(t)$  est le burst de l'utilisateur n° 2

Chaque burst est un signal sinusoïdal modulé par les symboles associés :

$$\begin{aligned} b_1(t) &= d_1(t) \cos(2\pi f_1 t) & 0 \leq t \leq T_b \\ b_2(t) &= d_2(t) \cos(2\pi f_2 t) & 0 \leq t \leq T_b \end{aligned}$$

- $d_1(t)$  sont les symboles du burst de l'utilisateur n° 1
- $d_2(t)$  sont les symboles du burst de l'utilisateur n° 2
- $f_1$  est la fréquence de la porteuse n° 1
- $f_2$  est la fréquence de la porteuse n° 2

Comme signalé auparavant, les symboles d'un burst sont constitués d'une séquence connue appelée préambule et d'une séquence aléatoire de type NRZ.

1- Avant de générer les échantillons du signal reçu par le récepteur, évaluer les paramètres suivants (cette partie pourra être effectuée avant la première séance de TP et les résultats pourront être reportés dans l'annexe "**liste des paramètres utiles au développement**") :

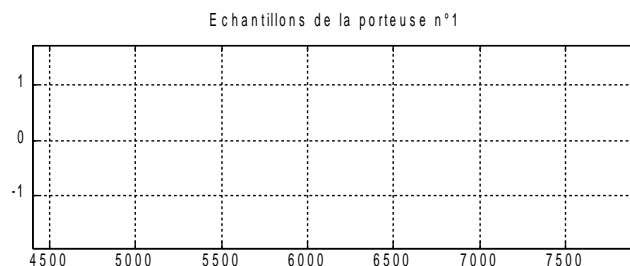
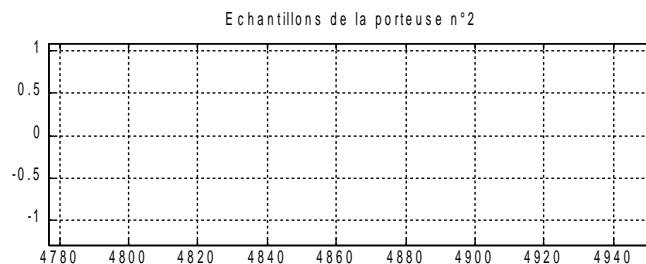
- Nombre d'échantillons par trame
- Nombre d'échantillons par timeslot
- Nombre d'échantillons par burst
- Nombre d'échantillons par symbole
- Nombre de symboles par burst
- Nombre de symboles de trafic

Note : utiliser les règles fournies en annexe pour nommer les différents paramètres et signaux lors du développement sous MATLAB.

2- Générer les symboles de chaque burst  $d_1(t)$  et  $d_2(t)$ . Pour cela, utiliser un préambule composé de 20 symboles (+1) suivis de 20 symboles (-1) et compléter le préambule par une séquence aléatoire NRZ  $\{-1, +1\}$  (utiliser la fonction *rand*).

3- Générer les échantillons de chaque burst  $b_1(t)$  et  $b_2(t)$  en fonction de la fréquence porteuse associée (utiliser la fonction *kron*).

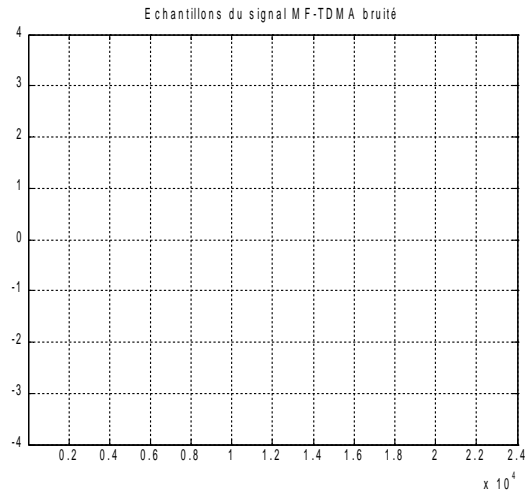
4- Evaluer l'instant de début de chaque burst et générer les échantillons de la porteuse associée. Un exemple de résultat est présenté ci-dessous :



5- Générer les échantillons du signal reçu par le récepteur en combinant les 2 porteuses et en ajoutant un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart type 0.2 (utiliser la fonction *randn*).

6- Analyser et commenter les différents signaux obtenus.

La figure suivante donne un aperçu du résultat attendu pour la génération des échantillons du signal MF-TDMA synthétique :



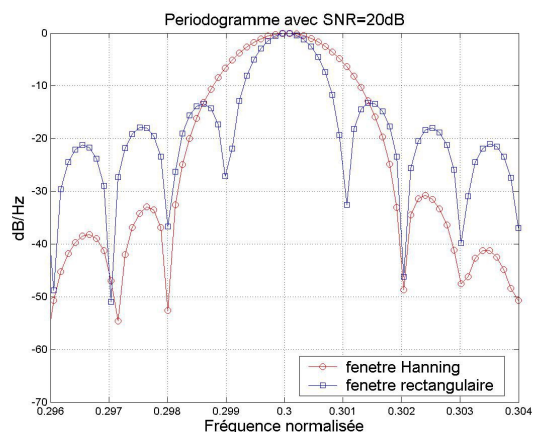
Note : Penser à sauvegarder les signaux de cette étape (utiliser la fonction *save*).

***Etape 2 : Analyse spectrale :***

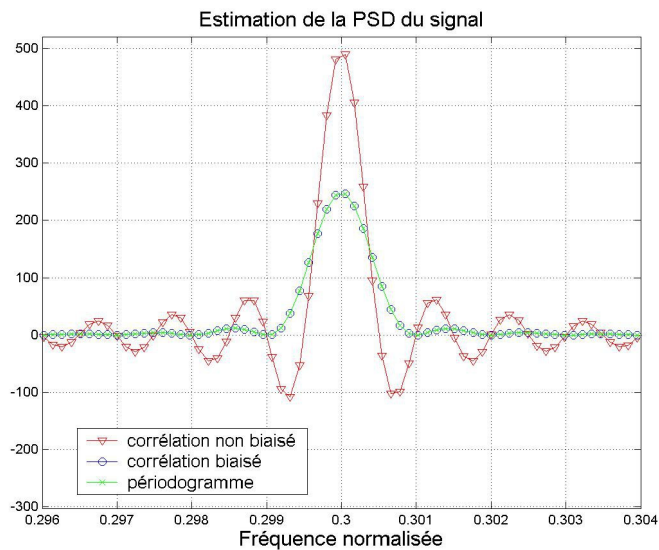
1- Cette première partie a pour but d'analyser les estimateurs de la densité spectrale de puissance obtenus par les méthodes du périodogramme et du corrélogramme exposées en annexe. Dans ce but, générer une sinusoïde à la fréquence de 60Hz perturbée par un bruit additif blanc gaussien (on pourra fixer une fréquence d'échantillonnage de 200Hz). Tracer les signaux temporels correspondants à divers rapports signal sur bruit :

$$SNR = 10 \log_{10} \left( \frac{P_s}{P_b} \right),$$

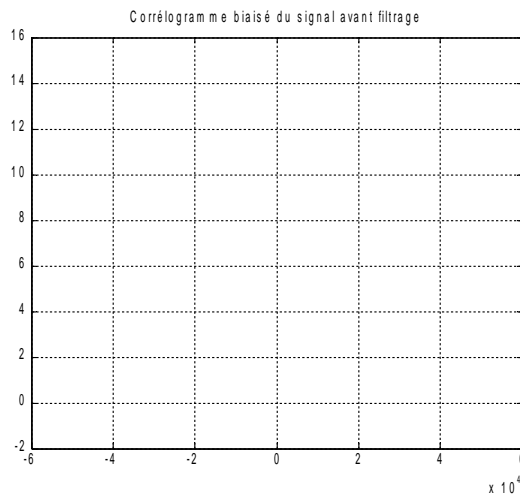
où  $P_s$  et  $P_b$  désignent les puissances du signal et du bruit. Calculer le périodogramme de la sinusoïde bruitée en utilisant les fenêtres rectangulaire et de Hanning :



Déterminer les fonctions d'autocorrélation biaisée et non biaisée de la sinusoïde bruitée (utiliser la fonction *xcorr*) puis les densités spectrales de puissance de ce signal (Lisez attentivement la remarque 3 de l'annexe). Une comparaison avec le périodogramme est illustrée ci-dessous :



2- Déterminer le spectre du signal MF-TDMA bruité à l'aide d'une des méthodes étudiées précédemment. Le cas du corrélogramme biaisé est illustré ci-dessous :



Afin d'analyser la figure précédente, déterminer la densité spectrale de puissance du signal aléatoire :

$$m(t) = d_1(t) \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + d_2(t) \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$$

où  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des phases aléatoires uniformément réparties sur  $[0, 2\pi]$ .

En déduire le rapport des amplitudes associées aux fréquences  $f_1 = 0$  et  $f_2 \neq 0$  et confirmer ce rapport à partir du spectre obtenu.

***Etape 3 : Extraction de la porteuse par filtrage :***

Identifier quel type de gabarit de filtre est le mieux approprié pour récupérer les données de l'utilisateur n° 1. Proposer une fréquence de coupure pour le gabarit approprié et filtrer le signal MF-



TDMA (méthode fréquentielle). La figure suivante est une illustration du résultat attendu lorsqu'on observe la zone correspondante à la fin du burst :

*Note* : Penser à sauvegarder les signaux de cette étape (utiliser la fonction *save*).

***Etape 4 : Détection de la présence du burst :***

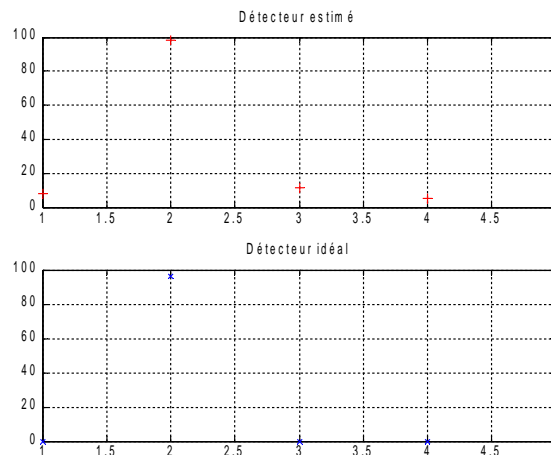
Après avoir récupéré la porteuse cible, cette étape va servir à identifier le numéro du timeslot occupé par le burst de l'utilisateur n° 1. On fait les hypothèses suivantes sur la statistique du signal filtré en absence et en présence du burst pour chaque timeslot :

$$\begin{array}{ll} y_n = b_n & \text{sous hypothèse } H_0 \text{ (absence de burst)} \\ y_n = d_n + b_n & \text{sous hypothèse } H_1 \text{ (présence de burst)} \end{array}$$

où  $b_n$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  ( $b_n \sim N(0, \sigma^2)$ ) et  $d_n$  est un signal NRZ (on supposera pour simplifier que le signal NRZ occupe toute la durée du timeslot).

1- Déterminer la densité de probabilité du signal  $y_n$  sous les deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$ . En déduire la forme du détecteur de Neyman Pearson.

2- Pour chaque timeslot, appliquer l'algorithme de détection obtenu précédemment sur le signal filtré ainsi que sur le signal idéal (porteuse n° 1). Analyser les résultats obtenus illustrés ci-dessous :



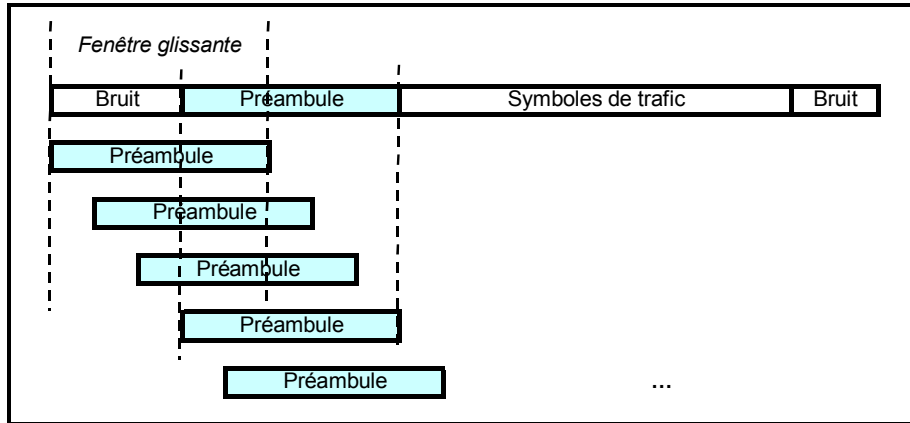
En particulier, retrouver analytiquement la valeur maximale observée lorsqu'on applique la procédure de détection (pour cela, déterminer le nombre de symboles positifs et le nombre de symboles négatifs du burst de l'utilisateur n° 1 et prendre en compte le nombre d'échantillons par symbole). En déduire une valeur appropriée du seuil de détection.

3- Extraire les échantillons du timeslot contenant le burst de l'utilisateur n° 1

*Note* : Penser à sauvegarder les signaux de cette étape (utiliser la fonction *save*).

***Etape 5 : Localisation temporelle du burst :***

L'objectif de cette étape est de mesurer l'instant d'arrivée du burst dans le timeslot. Cette mesure est basée sur l'utilisation de l'intercorrélation glissante entre les échantillons du timeslot et les échantillons du préambule qui est une séquence connue par le récepteur :



Pour cette étape, on utilise un estimateur de l'intercorrélacion entre le préambule et une partie du timeslot correspondant à l'intervalle  $[k+1, k+N_p]$ :

$$C_{px}(k) = \frac{1}{N_p} \sum_{n=1}^{N_p} p(n)x(k+n), \quad k = 0, \dots, N - N_p$$

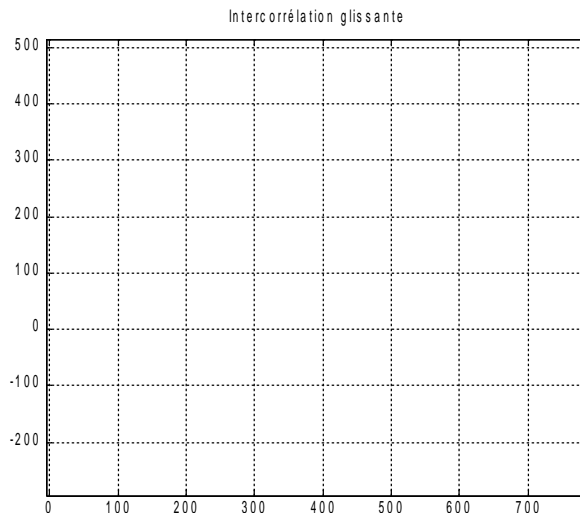
- $p(n)$  ( $1 \leq n \leq N_p = 40 \times 12$ ) représente les échantillons du préambule
- $N_p$  est le nombre d'échantillons du préambule
- $x(n)$  représente les échantillons du timeslot de l'utilisateur  $n^\circ 1$
- $N$  est le nombre d'échantillons du timeslot

1- Sous certaines hypothèses d'ergodicité,  $C_{px}(k)$  permet d'estimer l'intercorrélacion :

$$K_{px}(\tau) = E[p(t)x(t+\tau)]$$

où  $p(t)$  est le préambule et  $x(t)$  est le signal du timeslot (i.e. succession d'un temps de garde, d'un préambule et d'un signal NRZ noyé dans un bruit additif de moyenne nulle). Déterminer  $K_{px}(\tau)$  et montrer que cette fonction est maximale en  $\tau = \tau_1$  où  $\tau_1$  est le retard du burst par rapport au début du timeslot.

2- Générer les échantillons associés au préambule  $p(n)$  (utiliser la fonction *kron*) et tracer l'estimateur  $C_{px}(k)$ . La figure suivante est une illustration du résultat attendu :



3- Analyser le profil obtenu et proposer un estimateur de l'instant de début du préambule. Calculer la valeur théorique du maximum de  $C_{px}(k)$  (effectuer un calcul numérique en prenant en compte le nombre d'échantillons par symbole).

4- Extraire les échantillons du burst de l'utilisateur n° 1

Note : Penser à sauvegarder les signaux de cette étape (utiliser la fonction *save*).

***Etape 6 : Restauration des données de l'utilisateur :***

Cette étape sert à restaurer les symboles de l'utilisateur n° 1 en utilisant la technique de filtrage adapté. Il est donc impératif de consulter le paragraphe « *Matched filtering* » de l'article fourni en support au sujet :

**« *Matched filtering and timing recovery in digital receivers* »**

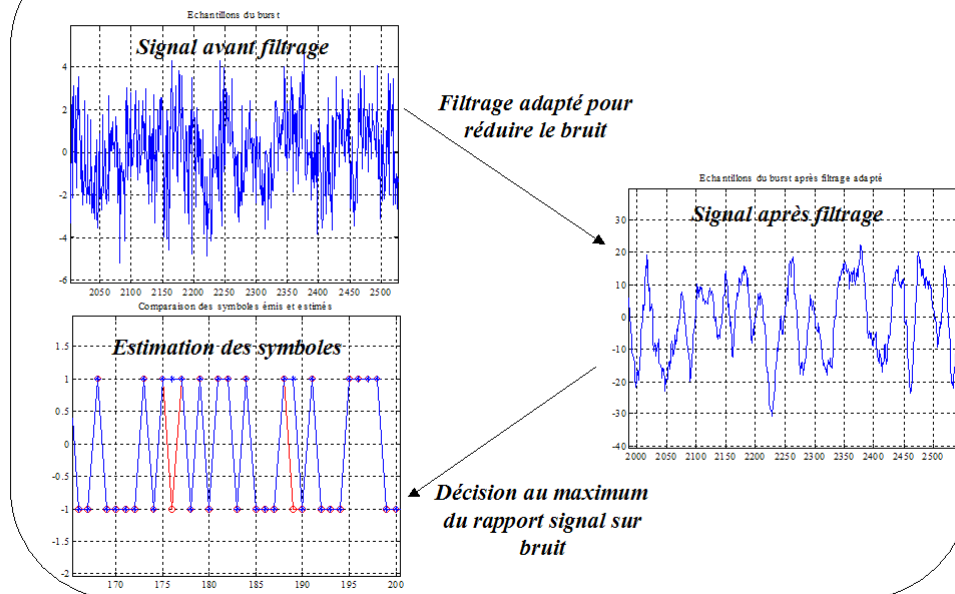
1- Compte tenu de la nature du signal présent dans le burst, donner une formulation analytique de la réponse du filtre adapté.

2- Exprimer la réponse impulsionnelle du filtre adapté dans le cas d'un signal numérique en prenant en compte la fréquence d'échantillonnage.

3- Réaliser le filtrage adapté des échantillons du burst en utilisant la réponse impulsionnelle exprimée ci-dessus (utiliser la fonction *filter*). Comparer les signaux avant et après filtrage.

4- Estimer les symboles après filtrage adapté en comparant le signe des points obtenus après échantillonnage du signal filtré à l'instant optimal. Comparer les symboles estimés avec les symboles émis par l'utilisateur n°1 comme illustré par la figure suivante :

## Restauration des données de l'utilisateur :



5- Evaluer le *TES* (Taux d'Erreurs par Symbole) défini comme étant le rapport entre le nombre de symboles erronés et le nombre de symboles émis.

6- Etudier l'influence de l'instant de décision sur le *TES*. Pour cela, tracer l'évolution du *TES* en avançant l'instant de décision d'un nombre d'échantillons allant de 1 à 6 par rapport à l'instant optimal.

7- Justifier théoriquement le résultat obtenu du *TES* quand l'instant de décision est avancé de 6 échantillons par rapport à l'instant optimal. Pour cela, étudier le comportement du filtre adapté avec la séquence suivante  $\{-1, +1, +1, -1, -1\}$ . En déduire les différents cas de décision quand le filtre adapté est appliqué à un signal NRZ et que l'instant de décision est avancé d'une demi période.

8- Etudier l'influence sur le *TES* du rapport signal sur bruit en fonction de l'instant de décision. Pour cela, ajouter un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart type variable et évaluer le *TES* en fonction de l'instant de décision.

9- Commenter les différents profils obtenus et faire une synthèse sur l'influence des différents paramètres sur les performances du récepteur.

**Annexe : Liste des paramètres utiles au développement**

Trame MF-TDMA			
Durée de la trame	200	ms	D_Trame
Nombre de timeslots par porteuse	5		Nb_Timeslots_Trame
Durée du timeslot	40	ms	D_Timeslot
Durée du burst	38	ms	D_Burst
Nombre de symboles du préambule	40		Nsym_Preambule
Rythme symbole	10	kHz	Rs
Fréquence de la porteuse n° 1	0	kHz	f1
Fréquence de la porteuse n° 2	46	kHz	f2
Fréquence d'échantillonnage	120	kHz	fe
Nombre d'échantillons par trame			Nech_Trame
Nombre d'échantillons par timeslot			Nech_Timeslot
Nombre d'échantillons par burst			Nech_Burst
Nombre d'échantillons par symbole			Nech_Symbole
Nombre de symboles par burst			Nsym_Burst
Nombre de symboles de trafic			Nsym_Trafic
Utilisateur n° 1			
Numéro de la porteuse	1		
Numéro du timeslot	2		Num_Timeslot1
Retard du burst par rapport au timeslot	1	ms	Retard_Burst1
Instant de début du burst		ms	Position_Burst1
Indice du premier échantillon du burst			Debut_Burst1
Utilisateur n° 2			
Numéro de la porteuse	2		
Numéro du timeslot	2		Num_Timeslot2
Retard du burst par rapport au timeslot	0	ms	Retard_Burst2
Instant de début du burst		ms	Position_Burst2
Indice du premier échantillon du burst			Debut_Burst2
Bruit			
Ecart type du bruit	0.2		Ecart_Type
Filtrage			
Fréquence de coupure du filtre passe bas		kHz	fc

**Annexe : Liste des signaux utiles au développement**

ETAPE	NOM	DESCRIPTION
Modélisation	<i>preambule</i>	Symboles du préambule
	<i>trafic1</i>	Symboles de trafic de l'utilisateur n° 1
	<i>trafic2</i>	Symboles de trafic de l'utilisateur n° 2
	<i>data1</i>	Symboles du burst de l'utilisateur n° 1
	<i>data2</i>	Symboles du burst de l'utilisateur n° 2
	<i>burst1</i>	Echantillons du burst de l'utilisateur n° 1
	<i>burst2</i>	Echantillons du burst de l'utilisateur n° 2
	<i>porteuse1</i>	Echantillons de la porteuse n° 1
	<i>porteuse2</i>	Echantillons de la porteuse n° 2
	<i>mftdma</i>	Echantillons du signal MF-TDMA
	<i>signal</i>	Echantillons du signal MF-TDMA bruité
Filtrage	<i>signal_filtre</i>	Echantillons du signal MF-TDMA filtré
Détection	<i>timeslot</i>	Extraction des échantillons du timeslot détecté
localisation	<i>sequence</i>	Echantillons du préambule
	<i>burst</i>	Extraction des échantillons du burst détecté
Restauration	<i>h</i>	Réponse impulsionnelle du filtre adapté
	<i>burst_filtre</i>	Echantillons du burst détecté après filtrage adapté
	<i>data</i>	Symboles du burst après filtrage adapté

## Annexe : Périodogramme / Corrélogramme

La densité spectrale de puissance (DSP) d'un signal  $x(t)$  à énergie finie est définie par :

$$s(f) = TF[K_x(\tau)] = |X(f)|^2$$

où  $X(f)$  est la transformée de Fourier de  $x(t)$  et  $K_x(\tau)$  sa fonction d'autocorrélation. Il en découle deux méthodes d'estimation de la DSP appelées **périodogramme** et **corrélogramme**.

- **Périodogramme :**

Lorsqu'on estime la transformée de Fourier avec l'algorithme de FFT rapide de MATLAB, on montre qu'un estimateur satisfaisant de la DSP du signal  $x(t)$  appelé périodogramme est défini par :

$$\frac{1}{N} |TFD[x(n)]|^2$$

où  $x(n)$  est obtenu par échantillonnage de  $x(t)$ .

- **Corrélogramme :**

L'estimation de la DSP par corrélogramme comporte deux étapes :

1. Estimation de la fonction d'autocorrélation (*xcorr*) qui produit  $\hat{K}_x(n)$
2. Transformée de Fourier discrète de  $\hat{K}_x(n)f(n)$ , où  $f(n)$  est une fenêtre de pondération et  $\hat{K}_x(n)$  est l'estimation biaisée ou non biaisée de la fonction d'autocorrélation.

Remarque 1 :

il est important de noter que lorsque  $\hat{K}_x(n)$  est l'estimateur biaisé de la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$ , **le corrélogramme coïncide exactement avec le périodogramme**.

Remarque 2 : Estimateurs spectraux moyennés

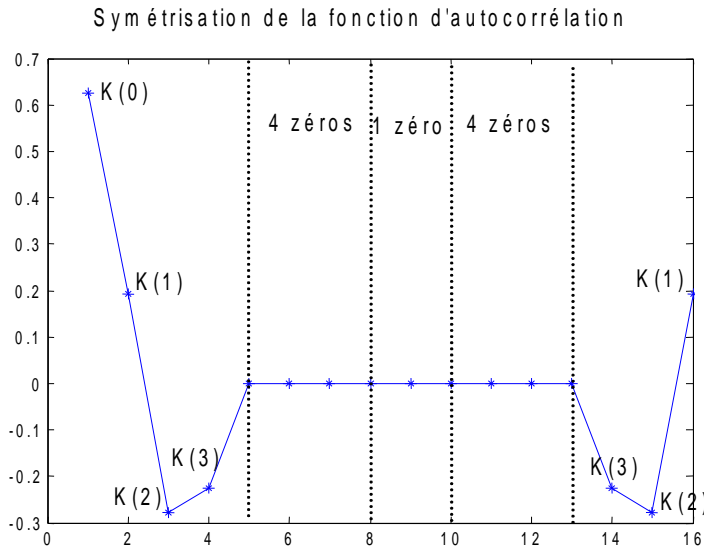
On montre que la variance des estimateurs de la DSP (corrélogramme et périodogramme) ne dépend pas de la durée du signal. Ces estimateurs ne sont donc pas convergents. Afin de réduire la variance des estimateurs, il est habituel de diviser le signal observé en plusieurs tranches et de moyenner les estimateurs obtenus sur chaque tranche. La variance des estimateurs moyennés est alors inversement proportionnelle au nombre de tranches, ce qui réduit la variance.

Remarque 3 : Implantation numérique

Si le signal numérique  $x(n)$  possède  $N_s$  points, la fonction *xcorr* calcule la fonction d'autocorrélation  $\hat{K}_x(n)$  pour  $n = -(N_s - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (N_s - 1)$  (on a donc  $2N_s - 1$  points). On peut "padder" cette autocorrélation par des zéros afin d'avoir une représentation plus précise de la DSP. L'algorithme de transformée de Fourier discrète de MATLAB nécessite une symétrisation de la fonction d'autocorrélation de la façon suivante :

- Points d'autocorrélation  $\hat{K}_x(0), \hat{K}_x(1), \dots, \hat{K}_x(N_s - 1)$
- $N_z$  zéros
- zéro central
- $N_z$  zéros
- Points d'autocorrélation  $\hat{K}_x(N_s - 1), \dots, \hat{K}_x(1)$

Cette procédure de symétrisation est illustrée sur la figure suivante pour  $N_s = 4$  et  $N_z = 4$  :



**Annexe : Du filtrage analogique au filtrage numérique**

- **Filtrage Analogique :**

Les opérations de filtrage consistent à « éliminer » ou « mettre en évidence » certaine(s) partie(s) de la bande de fréquence occupée par un signal donné. Dans le domaine continu, la transformée de Fourier d'un signal  $x(t)$  est définie par  $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$ . Filtrer un signal consiste à sélectionner une bande de fréquence d'intérêt et la mettre en évidence par rapport au reste des composantes fréquentielles du signal. Dans le domaine fréquentiel (Fourier) l'opération « naturelle » de filtrage correspond donc à une multiplication du type :  $X_{\text{filtre}}(f) = X(f)H(f)$ , où  $X(f) = TF\{x(t)\}$  est la transformée de Fourier du signal temporel et  $H(f)$  est la **fonction de transfert** du filtre qui correspond au gabarit fréquentiel pour l'opération de filtrage désirée.

L'opération de multiplication dans le domaine fréquentiel trouve son équivalent dans la convolution dans le domaine temporel (et inversement). Ainsi une opération de filtrage temporel analogique est :  $x_{\text{filtre}}(t) = x(t) * h(t)$ , où  $h(t)$  désigne la réponse impulsionnelle du filtre et correspond à :  $h(t) = TF^{-1}\{H(f)\}$  ou encore  $H(f) = TF\{h(t)\}$ .

- **Filtrage Numérique :**

Si les opérations de filtrage analogique présentées précédemment sont physiquement réalisées par des circuits électroniques (du Hardware), mettant en jeu des circuits (R, L, C), le traitement numérique mis en œuvre par l'intermédiaire de  $\mu P$  et de programmation informatique connaît depuis plusieurs années un essor grandissant, offrant des possibilités beaucoup plus vastes (en termes de complexité, taille, reprogrammabilité...).

Le signal numérique  $x(n), n \in \{1, \dots, N\}$  est obtenu par échantillonnage du signal continu qui représente le signal analogique associé  $x(t)$ . En toute rigueur, si  $T_e$  est la période d'échantillonnage, le signal numérique obtenu en sortie du convertisseur analogique numérique est  $x(n) = x(nT_e)$ . Il est donc possible comme dans le cas de signaux continus de définir les opération de filtrage dans le domaine discret. Dans cet espace de représentation, la transformée en Z est le pendant de la transformée de Fourier pour le continu :

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k}$$

Une des propriétés essentielle de la transformée en Z (notée TZ) est le théorème du retard :

$$X(z)z^{-m} = TZ[x(n)]z^{-m} = TZ[x(n-m)]$$

Ainsi un filtre dans le domaine discret se définit par une réponse impulsionnelle, une suite de points  $h(n)$  ( $n \in N$ ), dont la transformée en Z désigne la fonction de transfert du filtre :

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k}$$

Remarque : en pratique on n'utilise que la transformée en Z dite unilatérale,  $X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k}$  qui suppose le signal  $x$  causal ( $x(n)=0$  pour  $n<0$ ). De la même manière, le principe de causalité (« l'effet ne peut précéder la cause ») fait que la réponse impulsionnelle de tout système physique est obligatoirement nulle pour  $t<0$ . Donc pour tout système causal on a :  $h(n)=0$  pour  $n<0$ . C'est pourquoi nous ne noterons plus les indices de la TZ.

L'opération de filtrage dans le domaine fréquentiel, en Z, tout comme pour le cas continu est un produit de l'entrée par la fonction de transfert du filtre :

$$X_{\text{filtre}}(z) = H(z)X(z)$$

Ainsi, en utilisant le théorème du retard on montre que l'opération de filtrage peut encore s'écrire dans le domaine temporel discret :

$$X_{\text{filtre}}(z) = H(z)X(z) = \left[ \sum h(k)z^{-k} \right] X(z) = \sum h(k)X(z)z^{-k}$$

En utilisant le théorème du retard et la définition de la TZ, cette expression devient dans le domaine temporel :

$$x_{\text{filtre}}(n) = \left[ \sum h(k)TZ^{-1} \left[ X(z)z^{-k} \right] \right] = \sum h(k)x(n-k)$$

théorème  
du retard

qui n'est autre que l'expression de la formule de convolution discrète. C'est l'opération de filtrage qui est concrètement implantée dans un ordinateur : la sortie à un instant donné  $n$  est une combinaison linéaire des échantillons d'entrée aux instants inférieurs à  $n$ .

Cependant on vise généralement des opérations de filtrage dites temps réel (calcul de l'échantillon de sortie pendant l'intervalle de temps entre 2 échantillons d'entrée) ; or la charge de calcul de cette opération générale croît avec le temps (i.e., les indices sont tels que  $k$  varie entre 0 et l'infini dans l'équation précédente), plus on a d'échantillons passés plus le calcul d'un échantillon nécessite d'opérations élémentaires. Afin de limiter cette charge de calcul, on considère une classe de filtres linéaires ayant une charge calculatoire constante au cours du temps qui est la classe des filtres récursifs qui possèdent une expression générale de la forme :

$$x_{\text{filtre}}(n) = - \sum_{k=1}^M a_k x_{\text{filtre}}(n-k) + \sum_{k=0}^N b_k x(n-k)$$

Dans ce cas la fonction de transfert associée est une fraction rationnelle en Z :



$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$$

Pour définir un tel filtre numérique, il suffit donc de déterminer les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  intervenant dans  $H(z)$  (sous MATLAB, voir la commande *filter*).